Užitečné vztahy

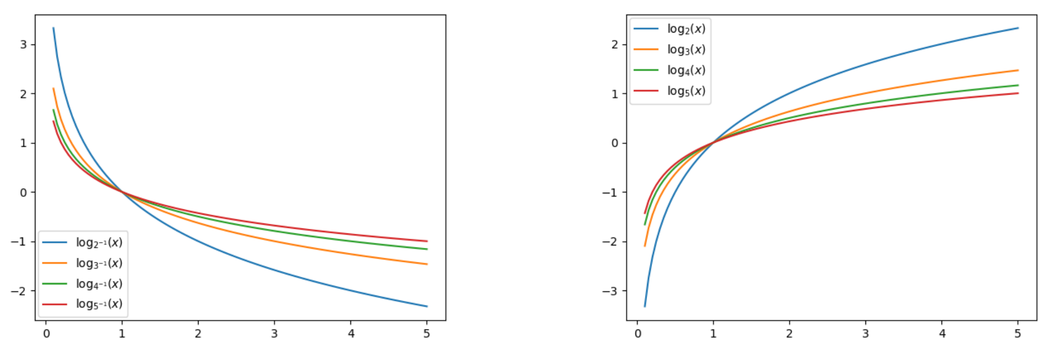
Opakování

Pro goniometrické funkce platí

$$
\begin{aligned}
\sin^2(x) + \cos^2(x) &= 1 \\
\sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \\
\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\
\sin(x \pm y) &= \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y) \\
\cos(x \pm y) &= \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)
\end{aligned}
$$

Pro logaritmus platí

$$
\begin{aligned}
\forall a, x, y \in (0, \infty) : \log_a(x) + \log_a(y) &= \log_a(xy) \\
\forall a, x \in (0, \infty)\ \forall y \in \mathbb{R} : y \log_a(x) &= \log_a(x^y) \\
\forall a, b, x \in (0, \infty) : \log_a(x) &= \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}
\end{aligned}
$$



(a) $a < 1$ (b) $a > 1$

Obrázek 1: $y = \log_a(x)$

Funkce

Mějme množiny A, B, C. Potom

- fce $f : A \to B$ je zobrazení (předpis), který každému $x \in A$ přiřazuje nějaké $f(x) \in B$. Obraz množiny A je množina
$$f(A) = \{y \in B : \exists x \in A : f(x) = y\},$$
- inverzní fce k f je $f^{-1} : B \to A$, která pro libovolnou dvojici $x \in A$ a $y \in B$ splňuje
$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y),$$
- složení dvou zobrazení $f : A \to B$ a $g : B \to C$ je fce $h : A \to C$ splňující $h(x) = g(f(x))\ \forall x \in A$. Používá se značení $h = g \circ f$.

Fce $f : A \to B$ je

- prostá, pokud $\forall x, y \in A : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$,
- na (neboli surjektivní), pokud $\forall y \in B\ \exists x \in A : f(x) = y$,
- bijekce, pokud je f prostá a na.

Pro $M \subseteq \mathbb{R}$ a $x \in M$ platí, že

- x je maximum $M \Leftrightarrow\ \forall a \in M : a \leq x$.
- x je minimum $M \Leftrightarrow\ \forall a \in M : a \geq x$.
- x je supremum $M \Leftrightarrow\ (\forall a \in M : a \leq x) \wedge (\forall \epsilon > 0\ \exists b \in M : x - \epsilon \leq b)$.
- x je infimum $M \Leftrightarrow\ (\forall a \in M : a \geq x) \wedge (\forall \epsilon > 0\ \exists b \in M : x + \epsilon \geq b)$.

Posloupnosti

Posloupnost je fce $a : \mathbb{N} \to M$, kde jednotlivé členy posloupnosti značíme $a(n) = a_n$. Celou posloupnost pak značíme $(a_n) = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$. Posloupnost nazveme

(a) rostoucí (resp. klesající), pokud $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$ (resp.$a_{n+1} < a_n$),

(b) nerostoucí (resp. neklesající), pokud $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n$ (resp.$a_{n+1} \geq a_n$).

Mějme nyní reálnou posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}$. Číslo a nazveme (vlastní) limitou posloupnosti (a_n), pokud

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \tilde{n} \in \mathbb{N} \ \forall n > \tilde{n} : |a - a_n| < \epsilon.$$

Řekneme, že posloupnost má nevlastní limitu $\pm\infty$, pokud

$$\forall K \in \mathbb{R} \ \exists \tilde{n} \in \mathbb{N} \ \forall n > \tilde{n} : \pm a_n > K.$$

K označení používáme

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim a_n = a.$$

Exponenciála se základem e se dá definovat pomocí nekonečné řady

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{x}{n}\right)^i = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \ldots$$

Posloupnosti II

Pro $a \in \mathbb{R}$ jsou definované výrazy $a \pm \infty$, $\pm(\infty + \infty)$, $a \cdot (\pm\infty)$, $\frac{a}{\pm\infty}$ a pro $a \neq 0$ i $\frac{\pm\infty}{a}$. Jiné výrazy s nekonečny nejsou dobře definované.

Nechť a_n, b_n a c_n jsou posloupnosti a $a \in \mathbb{R}$. Potom

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.
2. Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ a b_n je podposloupnost a_n. Potom $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.
3. Nechť $k \in \mathbb{N}$ je nezávislé na n, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Potom $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$.
4. Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a b_n je omezená. Potom $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.
5. Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$ a nechť $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n$. Potom $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.
6. Nechť $a_n \geq 0\ \forall n > n_0 \in \mathbb{N}$. Potom $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} e^{b_n \ln(a_n)}$.

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}$. Pak

$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1}).$$

Řady

Pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ definujeme částečný součet

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \cdots + a_n.$$

Nekonečnou řadu pak definujeme jako $\lim_{n\to\infty} s_n$.

Řadu nazveme absolutně konvergentní, pokud $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Absolutní konvergence implikuje neabsolutní

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy.

- Pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *(nutná podmínka konvergence)*
- Pokud $0 < \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje. *(srovnávací kritérium)*
- Pokud $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. Pokud $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. *(Cauchyovo odmocninové kritérium)*
- Pokud $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. Pokud $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. *(Cauchyovo odmocninové kritérium)*
- Pokud $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. Pokud $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. *(d'Alambertovo podílové kritérium)*

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady a nechť $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$.

- Pokud $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ má omezené částečné součty, potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje. *(Dirichletovo kritérium)*
- Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje. *(Abelovo kritérium)*
- Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konverguje. *(Cauchyovo kondenzační kritérium)*

Limity funkcí

Známé limity jsou

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

Platnost ukážeme později.

Symboly o a O:
Nechť $a\in\mathbb{R}^*,\delta>0$ a f,g jsou definované na prstencovém okolí $P(a,\delta)$, přičemž g je zde kladná. Pokud

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0,$$

potom píšeme $f=o(g)$ pro $x\to a$.
Pokud existuje $c>0$ tak, že

$$\forall x\in P(a,\delta):|f(x)|<cg(x),$$

pak píšeme, že $f=O(g)$ pro $x\to a$.

Heineho věta:
Nechť $a\in\mathbb{R}^*,M\subset\mathbb{R},P(a,\delta)\cap M\neq\emptyset$ pro každé $\delta>0,f:M\to\mathbb{R}$ a $A\in\mathbb{R}^*$. Pak jsou ekvivalentní následující tvrzení

- $\lim_{x\to a}f(x)=A$,
- $\forall x_n\subset M:x_n\neq a\ \forall n\in\mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty}x_n=a$ platí, že $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

Limita složené fce: Nechť $c,A,B\in\mathbb{R}^*$, $f(x)$ je definovaná na nějakém prstencovám okolí A, fce $g(x)$ je definovaná na nějakém prstencovém okolí c,

$$\lim_{x\to A}f(x)=B,\lim_{x\to c}g(x)=A,$$

a platí alespoň jedna z podmínek

- $f(x)$ je spojitá v bodě A,
- Na nějakém prstencovém okolí $P(c,\delta)$ fce $g(x)$ nenabývá hodnoty A.

Potom

$$\lim_{x\to c}f(g(x))=B.$$

Sčítací vzorec pro tan je

$$\tan(a\pm b)=\frac{\tan(a)\pm\tan(b)}{1\mp\tan(a)\tan(b)}.$$

Derivace

Derivaci definujeme pomocí

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f = f'(= f_{,x}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Derivace vyššího řádu (tady k) značíme

$$\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k} = f^{(k)}(= f_{,x\ldots x}) = \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cdots\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}_{k-\text{krát}} f.$$

Na cvičení 7 jsme spočítali základní limity

(a) $\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}x} = \alpha x^{\alpha-1}$,

(b) $\frac{\mathrm{d}\sin(x)}{\mathrm{d}x} = \cos(x)$,

(c) $\frac{\mathrm{d}\cos(x)}{\mathrm{d}x} = -\sin(x)$,

(d) $\frac{\mathrm{d}e^x}{\mathrm{d}x} = e^x$,

(e) $\frac{\mathrm{d}\ln(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$,

(f) $\frac{\mathrm{d}\arctan(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2}$.

Dále na přednášce se dokázalo (pro $f(x), g(x)$ fce a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

(a) $\frac{\mathrm{d}f\cdot g}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\cdot g + f\cdot\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$,

(b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\alpha f + \beta g) = \alpha\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \beta\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$,

(c) $\frac{\mathrm{d}f(g(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f(g(x))}{\mathrm{d}g(x)}\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f(y)}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}$,

(d) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Pro výpočet limity ve které se vyskytuje neurčitý výraz typu $\frac{\infty}{\infty}$, nebo $\frac{0}{0}$ lze použít l'Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Průběh funkce

Pro funkce $f \in C^1$ platí,

(a) $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ je rostoucí v bodě x,

(b) $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ je klesající v bodě x,

(c) $f'(x) = 0 \Rightarrow f$ má v bodě x lokální extrém.

Pro funkce $f \in C^2$ platí,

(a) $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ je konvexní v bodě x,

(b) $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ je konkávní v bodě x,

(c) $f''(x) = 0 \Rightarrow f$ má v bodě x inflexní bod.

Pokud má fuknce f asymptotu $y = kx + q$ když jde to $\pm\infty$, pak

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad q = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - kx$$

jsou vlastní limity.

Taylorův rozvoj

Taylorův polynom stupně $n \in \mathbb{N}_0$ v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ funkce f je

$$T_n^{f,x_0}(x) = T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i =$$

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Zbytek (chyba) Taylorovy aproximace je dána jako

$$R_n^{f,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

kde c leží mezi x a x_0.

Některé základní Taylorovy polynomy v bodě $x_0 = 0$ jsou

$$\sin(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\arctan(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{x^{2i+1}}{2i+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\ln(1+x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{x^i}{i} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

Integrály

Věta o substituci (alias "inverzní derivace složené fce")
Mějme $\phi : (a,b) \to (\alpha, \beta)$ a $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, kde ϕ má vlastní první derivaci všude na (a,b). Pak

$$F(\phi(x)) + c = \int f(\phi(x))\phi'(x)\ \mathrm{d}x,$$

kde $F : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ je primitivní funkce f.

Integrace per partes (alias "inverzní derivace součinu")
Nechť $f, g : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ jsou spojité na (α, β) a $F, G : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ jsou k nim primitivní funkce. Pak

$$F(x)G(x) + c = \int f(x)G(x)\ \mathrm{d}x + \int F(x)g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Linearita (alias linearita)
Nechť $f, g : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ jsou spojité a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak

$$\int \alpha f + \beta g\ \mathrm{d}x = \alpha \int f\ \mathrm{d}x + \beta \int g\ \mathrm{d}x$$

Určité integrály

Fundamental theorem of calculus:
Nechť $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá na $[a,b]$ a nechť F je primitivní funkce k f. Pak

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Věta o substituci
Nechť $\phi : (a,b) \to \mathbb{R}$ a $f : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$, kde ϕ má vlastní první derivaci všude na (a,b). Označme

$$J := \phi((a,b)) = \{\phi(t), t \in (a,b)\}.$$

Nechť f je spojitá na J a integrovatelná na vnitřku J. Pak

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Integrace per partes
Nechť $f,g : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ jsou spojité na (α,β) a $F,G : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ jsou k nim primitivní funkce. Pak

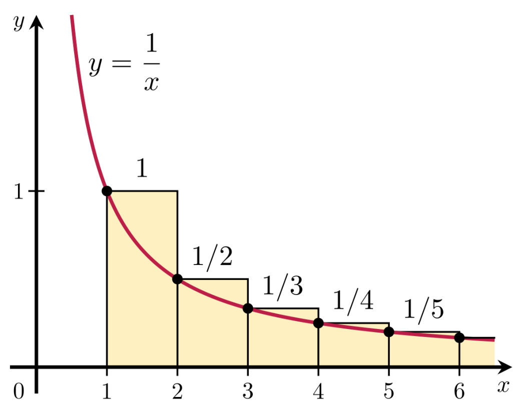
$$\int_a^b f(x)G(x)\ \mathrm{d}x = [FG]_a^b - \int_a^b F(x)g(x)\ \mathrm{d}x,$$

kde

$$[FG]_a^b = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

Integrální kritérium konvergence:
Nechť $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ je nezáporná, klesající fce. Pak

$$\int_1^\infty f(x)\ \mathrm{d}x \le \sum_{i=1}^{\infty} f(x) \le \int_1^\infty f(x-1)\ \mathrm{d}x$$



Obrázek 2: Vizualizace integrálního kritéria.

Určité integrály II

Délka křivky
Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ má na $[a, b]$ spojitou první derivaci. Pak délka křivky l grafu mezi a a b je

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2}\ \mathrm{d}x.$$

Rotační těleso
Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}_0^+$. Pak objem tělesa vzniklého rotací grafu f v $\mathbb{R}^3$ kolem osy x je

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)\ \mathrm{d}x$$

a jeho povrch je

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2}\ \mathrm{d}x.$$

Proč matematická analýza

Gradient
Pro fci více proměnných $f = f(x_1, \dots, x_n)$ můžeme studovat změnu její velikosti vzhledem ke každé z proměnných. Pokud budeme fixovat všechny proměnné až na k-tou, můžeme definovat parciální derivaci vzhledem ke k-té proměnné

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_k + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots x_n)}{h},$$

kterou můžeme též značit $\partial_k f$. Taková derivace nám říká velikost změny f, pokud změníme pouze x_k. Můžeme uvažovat vektor všech takových možných změn, kterému se říká gradient

$$\nabla f = (\partial_1 f, \dots, \partial_n f),$$

který nám říká takovou změnu v prostoru parametrů x_i, která způsobí největší lokální změnu f, neboli je to směr nejstrměnšího růstu f v daném bodě.

Diferenciální rovnice
Rovnice, která dává do souvislosti funkci a její derivace se označuje jako diferenciální rovnice. Danou diferenciální rovnici jde klasifikovat na základě mnoha faktorů, např.

- nejvyšší řád derivace (mluvíme o diferenciální rovnici nějakého řádu),
- pokud se zde vyskytují derivace podle jedné proměnné (tkz. obyčejné diferenciální rovnice), nebo jsou v ní parciální derivace podle více proměnných (tkz. parciální diferenciální rovnice),
- zda je hledaná fce násobená jejími proměnnými (tkz. nelineární diferenciální rovnice), nebo ne (lineární),
- ...

Řešením některých typů se dá strávit celý život.